- Je hebt twee uur de tijd voor het oplossen van de vraagstukken.
- Elk vraagstuk is maximaal 10 punten waard.
- Begin elke opgave op een nieuw vel papier.

μKW
12 juni 2015

Vraagstuk 1. We kunnen zinnen uit de Nederlandse taal vertalen naar predikatenlogica. Wat betekent dat we de symbolen $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ en $\neg$ mogen gebruiken, waar dit laatste symbool staat voor 'niet', dus $\neg(1 = 2)$ betekent: 'het is niet zo dat $1 = 2$'. We mogen ook natuurlijke getallen gebruiken (let op: 0 is geen natuurlijk getal), en eventueel hulpsymbolen. Een uitspraak van de vorm $\forall x$ betekent $\forall x \in \mathbb{N}$. Bijvoorbeeld: de zin $\phi(x) = \exists y(x = 2 \cdot y)$ betekent: 'x is een even natuurlijk getal', met de hulpsymbolen $=$ en $\cdot$ (normaal mag je $=$ altijd gebruiken, maar in deze opgave is dat niet het geval!). De zin $\psi = \forall x \exists y(y > x \wedge \exists z(y = 2 \cdot z))$ betekent 'er bestaan oneindig veel even natuurlijke getallen', met de hulpsymbolen $>$, $=$ en $\cdot$. In deze opgave mag je alleen de hulpsymbolen $<$ en $|$ gebruiken, waar $x|y$ betekent: x is een deler van y. Let op: je mag dus symbolen als $\cdot$, $+$ en $=$ niet gebruiken!

(a) Vertaal de zin 'x is een priemgetal' naar predikatenlogica (3 pt.)
(b) Vertaal de zin 'x is van de vorm $4k + 1$' naar predikatenlogica (5 pt.)
(c) Vertaal de zin 'er bestaan oneindig veel priemgetallen van de vorm $4k+1$' naar predikatenlogica (hint: noem de zinnen uit a en b respectievelijk $\phi(x)$ en $\psi(x)$, dat scheelt schrijfwerk). (2 pt.)

Vraagstuk 2. We definiëren de rij van Fibonacci als volgt: $F_0 = 0, F_1 = 1$ en $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ voor alle gehele $n \geq 0$.

(a) Bewijs dat $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ voor alle gehele $m \geq 1, n \geq 0$. (5 pt.)
(b) Laat a, b natuurlijke getallen zijn met grootste gemene deler 1. Bewijs dat F_a en F_b ook grootste gemene deler 1 hebben. Je mag hierbij gebruiken dat twee getallen a en b een grootste gemene deler 1 hebben dan en slechts dan als er gehele getallen x en y bestaan met $ax + by = 1$ (5 pt.)

Vraagstuk 3.

(a) Zij V een eindige verzameling en (V, d) een metrische ruimte. Bewijs dat voor elke $v \in V$ de verzameling $\{v\}$ open is. (3 pt.)
(b) Zij V een oneindige verzameling. Bewijs dat er een metriek d op V bestaat waarvoor er een $v_0 \in V$ bestaat zo dat $\{v_0\}$ niet open is. (7 pt.)

Vraagstuk 4. Gegeven een $n \times n$-matrix A met reële elementen. Definieer a_k voor alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ als $a_k = \text{rang}(A^k)$. Bewijs de volgende stellingen:

(a) Voor alle $k \geq 1$ geldt dat $a_k \leq a_{k-1}$. (3 pt.)
(b) Voor alle $k \geq 1$ geldt dat $2a_k \leq a_{k-1} + a_{k+1}$. (4 pt.)
(c) Voor alle $k \geq n$ geldt dat $a_k = a_n$. (3 pt.)